Il Principio di inversione di Möbius (caso insiemistico)

Osservazioni preliminari

1) Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>Dimostrazione</u> Basta osservare che

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n. \blacksquare$$

2) Siano A, B sottoinsiemi di un insieme finito S, $A \subseteq B$. Allora

$$\sum_{A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} = \begin{cases} 1 & \text{se } A = B \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

<u>Dimostrazione</u> Consideriamo solo il caso $A \neq B$.

Sia $|B| = n$, $|A| = k$. Se $C \subset B$ ha cardinalità h e $C \supset A$, allora C si può scrivere, <u>in modo unico</u>, nella forma

$C = A \dot{\cup} C'$, ove $|C'| = t = h - k$ e $C' \subseteq B \setminus A$.

Perciò

$$\sum_{A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} = \sum_{C' \subseteq B \setminus A} (-1)^{|B|-|C'|-|A|} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-k} \sum_{\substack{C' \subseteq B \setminus A \\ |C'|=t}} (-1)^{|B|-t-|A|} = \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} (-1)^{n-t-k} =$$

$$= (-1)^{n-k} \sum_{t=0}^{n-k} (-1)^t \cdot \binom{n-k}{t} = 0, \text{ essendo } n-k > 0 .$$

<u>Teorema</u> (Principio di inversione)
Sia S un insieme finito, $\mathbb{P}(S)$ l'insieme delle parti di S. Siano $f, g : \mathbb{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ due applicazioni tali che sussista la relazione:

i) $\sum_{A \subseteq B} f(A) = g(B)$, per ogni $B \in \mathbb{P}(S)$.

Vale allora la "relazione inversa":

ii) $f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A)$,

per ogni $B \in \mathbb{P}(S)$.

Dimostrazione Consideriamo le applicazioni:

$$\xi, \delta : \mathbb{P}(S) \times \mathbb{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

così definite:

$$\xi(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \subseteq B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\delta(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{se } A = B \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che l'osservazione 2) può essere allora riformulata come segue: per ogni $A, B \in \mathbb{P}(S)$, si ha $\sum_{C \subseteq B} \xi(A,C) \cdot (-1)^{|B|-|C|} = \delta(A,B)$.

Ora, si consideri l'espressione

$$\sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A)$$ che è uguale, in virtù

della relazione i) dell'enunciato, a

$$\sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \sum_{C \subseteq A} f(C) =$$

$$= \sum_{A \subseteq B} \sum_{C} \xi(C,A) \cdot f(C) \cdot (-1)^{|B|-|A|} .$$

Scambiando l'ordine delle somme, quest'ultima diviene

$$\sum_C f(C) \cdot \sum_{\substack{A \\ A \subseteq B}} \zeta(C, A) \cdot (-1)^{|B|-|A|} =$$

$$= \sum_C f(C) \cdot \delta(C, B) = f(B)$$, come volevasi. ∎

In maniera del tutto analoga, si può provare il principio DUALE:

<u>Teorema</u> S insieme finito, $\mathbb{P}(S)$ insieme delle parti di S.
Siano $f, g : \mathbb{P}(S) \to \mathbb{R}$ due applicazioni tali che:

i) $\displaystyle\sum_{\substack{A \\ A \supseteq B}} f(A) = g(B)$, per ogni $B \in \mathbb{P}(S)$.

Allora sussiste la relazione inversa:

ii) $\displaystyle f(B) = \sum_{\substack{A \\ A \supseteq B}} (-1)^{|A|-|B|} \cdot g(A)$,

per ogni $B \in \mathbb{P}(S)$. ∎

ESEMPIO FONDAMENTALE

Il numero delle applicazioni <u>suriettive</u> da un n-insieme su un m-insieme è dato da:

$$\sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} \cdot (-1)^{m-t} \cdot t^n$$

<u>Dimostrazione</u> Sia $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ un n-insieme, $T = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ un m-insieme.

Consideriamo le funzioni $f, g : \mathbb{P}(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definite:

1) per ogni $A \in \mathbb{P}(T)$,

$f(A) = \#$ applicazioni <u>suriettive</u> da S su A.

2) per ogni $B \in \mathbb{P}(T)$,

$g(B) = \#$ applicazioni <u>qualsiasi</u> da S a B.

È ovvio che sussiste la relazione:

$$g(B) = \sum_{A \subseteq B} f(A) \quad , \text{ per ogni } B \in \mathbb{P}(T).$$

In virtù del principio di inversione, si ha allora:

$$f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A), \text{ per ogni } \underline{B \in \mathbb{P}(T)}.$$

Per $B = T$, si ha in particolare:

$\#$ applicazioni <u>suriettive</u> da S su T =

$$= f(T) = \sum_{A \in \mathbb{P}(T)} (-1)^{|T|-|A|} g(A) =$$

$$= \sum_{t=0}^{m} \sum_{|A|=t} (-1)^{m-t} t^n = \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (-1)^{m-t} \cdot t^n.$$

COROLLARIO (Numeri di STIRLING di 2ª SPECIE).

Per definizione

$S(n,m) = \#$ partizioni di un n-insieme in m blocchi.

Allora

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (-1)^{m-t} \cdot t^n.$$

Problema delle concordanze generalizzato.

$$\{ \sigma \in \mathcal{S}_n ;\ Fix(\sigma) \supseteq B \}$$

$S = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$

$$\{ \sigma \in \mathcal{S}_n ;\ Fix(\sigma) = A \} .$$

Si ha: per ogni $B \in \mathbb{P}(S)$

$$\{ \sigma \in \mathcal{S}_n ;\ Fix(\sigma) \supseteq B \} =$$

$$= \dot{\bigcup_{\substack{A \\ A \supseteq B}}} \{ \sigma \in \mathcal{S}_n ;\ Fix(\sigma) = A \}$$

Questo implica: per ogni $B \in \mathbb{P}(S)$,

$$g(B) \overset{def}{=} | \{ \sigma \in \mathcal{S}_n ;\ Fix(\sigma) \supseteq B \} | =$$

$$= \sum_{\substack{A \\ A \supseteq B}} | \{ \sigma \in \mathcal{S}_n ;\ Fix(\sigma) = A \} | \overset{def}{=} \sum_{\substack{A \\ A \supseteq B}} f(A) .$$

Ne segue: (INVERSIONE)

$$f(B) = \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} g(A) =$$

$$= \sum_{h=k}^{n} \Big(\sum_{\substack{A \supseteq B \\ |A|=h}} (-1)^{h-k} (n-h)! \Big) \qquad \boxed{\text{per } |B| = k}$$

Perciò $\#\{ \sigma \in S_n ;\ |Fix(\sigma)| = k \}$ eguaglia

$$\binom{n}{k} \cdot f(B) =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \sum_{h=k}^{n} \binom{n-k}{h-k} (-1)^{h-k} (n-h)!$$

$$= \frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}} \sum_{h=k}^{n} \frac{\cancel{(n-k)!}}{(h-k)!\cancel{(n-h)!}} (-1)^{h-k} \cancel{(n-h)!}$$

$$= \frac{n!}{k!} \sum_{h=k}^{n} \frac{(-1)^{h-k}}{(h-k)!}.$$

<u>Corollario</u> $\mathbb{P}(\{ \sigma \in S_n ;\ Fix(\sigma) = \emptyset \}) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \simeq e^{-1}$$

Principio di inclusione/esclusione

Sia Ω un insieme finito, $A_1, A_2, \dots, A_n$ sottoinsiemi fissati di Ω.

Posto $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ definiamo una funzione

$$g : \mathcal{P}(\underline{n}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ponendo, per ogni $T \subseteq \underline{n}$,

$$g(T) = \left| \bigcap_{i \in T} A_i \cap \bigcap_{i \notin T} A_i^c \right|$$

Pertanto

$$g(T) = \# \{ x \in \Omega ;\ x \in A_i \ \forall i \in T,\ x \notin A_i \ \forall i \notin T \}$$

Si noti che $g(\emptyset) = \Omega - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Ora è chiaro che, posto, per ogni $T \subseteq \underline{n}$,

$$f(T) = \sum_{S \supseteq T} g(S) \qquad \underline{\text{ove}}$$

$$f(T) = \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| .$$

Si noti che, consistentemente, $f(\emptyset) = |\Omega|$.

Applicando il Teorema d'inversione (duale) si ha

$$g(T) = \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-|T|} f(S) =$$

$$= \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-|T|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| .$$

Per $T = \emptyset$, risulta:

$$g(\emptyset) = \left| \Omega - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| =$$

$$= \sum_{S \supseteq \emptyset} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{S \text{ t.c.} \\ |S| = k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k \;\; \% \;\; . \;\; \blacksquare$$

(FORMULA DI SYLVESTER)

% ponendo $S_k = \sum_{|S| = k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$

FORMULA DI CHARLES JORDAN

Sia e_r il numero degli elementi di Ω che appartengono <u>esattamente</u> ad r degli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Allora

$$e_r = \sum_{|T|=r} g(T) =$$

$$= \sum_{|T|=r} \Big(\sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-r} f(S) \Big) =$$

$$= \sum_{|T|=r} \Big(\sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-r} \Big| \bigcap_{i \in S} A_i \Big|$$

$$= \sum_{|S| \geq r} \sum_{\substack{T \subseteq S \\ |T|=r}} (-1)^{|S|-r} \Big| \bigcap_{i \in S} A_i \Big|$$

$$= \sum_{|S| \geq r} \binom{|S|}{r} (-1)^{|S|-r} \Big| \bigcap_{i \in S} A_i \Big|$$

$$= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{|S|=k} \Big| \bigcap_{i \in S} A_i \Big| =$$

$$= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \cdot S_k \, . \; \blacksquare$$

(per $r=0$ si ha la formula di Sylvester)

PROBLEMA DELLE CONCORDANZE GENERALIZZATO

Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Sia $e_r(n) = \{ \sigma \in S_n ; \ \sigma$ ha <u>esattamente</u> r punti fissi $\}$.

Fissiamo $\Omega = S_n$ e, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$,

$A_i = \{ \sigma \in \Omega = S_n ; \ \sigma(i) = i \}$.

Si ha chiaramente

$$\left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = (n - |S|)!$$

$$e_r(n) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{n}{k} (n-k)! =$$

$$= \frac{n!}{r!} \sum_{k=r}^{n} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!}$$

Per $r = 0$, la probabilità che una permutazione <u>non abbia</u> punti fissi è

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{e} .$$

Principio di inclusione/esclusione e misure.

Sia $\nu : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori non-negativi. ν si estende ad una funzione $\mu : \mathbb{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\mu(A) = \sum_{p \in A} \nu(p) \quad , \text{per ogni } A \in \mathbb{P}(S)$$

Ovviamente $\mu(\emptyset) = 0$. Una funzione del tipo μ si dice MISURA su S.

In modo del tutto analogo a quanto fatto per la formula di Sylvester, si prova:

Teorema Sia S insieme finito, $A_1, A_2, \dots, A_t$ sottoinsiemi di S, $T = \{1, 2, \dots, t\}$. Sia μ una misura su S. Allora:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{t} A_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \mu(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{t} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{t} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{t+1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t).$$

Problema 1   Sia $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un alfabeto di n lettere. Quante sono le parole ω su X di lunghezza $2n$, tali che:

i) ogni lettera compaia esattamente 2 volte.

ii) due caselle consecutive non siano mai occupate dalla stessa lettera.

Soluzione   Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$

Sia $\Omega_n = \{\omega ;\ \omega \text{ parola di lunghezza } 2n \text{ che soddisfi } i)\}$

Ovviamente $|\Omega_n| = \binom{2n}{2; \dots ; 2} = \frac{2n!}{2^n}$.

Per ogni $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, poniamo

$$A_i = \{\omega = x_1 x_2 \cdots x_{2n} ;\ \ x_i = x_{i+1}\}$$

Posto

$$\Psi_n = \left|\{\omega \in \Omega_n ;\ \omega \text{ soddisfa } ii)\}\right| ,$$

si ha ovviamente

$$\Psi_n = \left|\Omega_n - \bigcup_{i=1}^{2n-1} A_i\right|$$

Allora, dal principio di inclusione/esclusione, si ha:

$$\Psi_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \left(\sum_{|S|=k} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right| \right) \quad (*)$$

Si noti ora:

1) Se $|S| > n$, allora $\bigcap_{i \in S} A_i = \phi$ - (VEDI 2))

2) Se $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \leq n$ ed S contiene due interi consecutivi, allora

$$\bigcap_{i \in S} A_i = \phi \, .$$

3) Se $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \leq n$ ed S NON contiene due interi consecutivi, allora

$$\left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = (n)_k \binom{2n-2k}{2;2;\ldots;2} = (n)_k \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} \, .$$

4) Le k-ple $S = \{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k\}$ di tipo 3) sono esattamente

$$\binom{2n-1-k+1}{k} = \binom{2n-k}{k}$$

(caso particolare di Gergonne)

5) Perciò, da 1), 2), 3) e 4), risulta

$$\sum_{|S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \begin{cases} \binom{2n-k}{k} \cdot (n)_k \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

In conclusione, da $(*)$ risulta

$$\Psi_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n-k)_k}{k!(2n-2k)!} \cdot (n)_k \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k!\, 2^{n-k}} (n)_k \,. \quad \blacksquare$$

ESEMPIO

$\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 2$, $\Psi_3 = 30$.

Problema 2 (Funzione ϕ di Eulero)

Sia $n \in \mathbb{Z}^+$, $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Sia $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_r^{i_r}$, la presentazione di n come prodotto di (potenze) fattori primi diversi da 1. (Unica a meno dell'ordine). Sia

$$\phi(n) = \# \text{ degli interi positivi } m \leq n \text{ tali che } M.C.D.(m, n) = 1 \text{ ("primi con } n\text{")}$$

Allora

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_{r-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Soluzione Per ogni $i = 1, 2, \dots, r$, poniamo $A_i = \{m \in \underline{n};\ p_i | m\}$. Dal principio di inclusione/esclusione si ha:

$$\phi(n) = \left|\underline{n} - \bigcup_{i=1}^{r} A_i\right| = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,r\} \\ |S| = k}} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right| \quad (*)$$

Ora, se $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$, si ha:

$$\left|\bigcap_{i \in S} A_i\right| = \left|\{m \in \underline{n};\ m \text{ è divisibile per } p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}\}\right| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$$

La formula $(*)$ diviene allora:

$$\phi(n) = n \cdot \Big[1 - \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{p_i} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{r} \frac{1}{p_i p_j} -$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i<j<k}}^{r} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \sum_{\substack{i,j,h,k=0 \\ i<j<h<k}}^{r} \frac{1}{p_i p_j p_h p_k} \cdots + \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 p_3 \cdots p_r} \Big] =$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_{r-1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \quad \blacksquare$$

<u>ESEMPIO 1</u> $n = 250 = 2 \cdot 5^3$. Perciò $r = 4$ e, senza perdita di generalità $p_1 = 2$, $p_2 = 5$.

Perciò

$$\phi(250) = 250 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100.$$

In conclusione, vi sono 64 interi positivi ≤ 250 primi con 250. $\blacksquare$

<u>ESEMPIO 2</u> $n = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$$\phi(1000) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400. \quad \blacksquare$$

<u>Esercizio</u> Siano $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tali che $MCD(m,n) = 1$. Si provi che $\phi(m \cdot n) = \phi(m)\phi(n)$.

<u>Soluzione</u> Per ipotesi, avremo $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}$, $m = q_1^{j_1} q_2^{j_2} \cdots q_h^{j_h}$ con p_s, q_t primi, $p_s \neq q_t$ per ogni $s = 1, 2, \ldots, k$, $t = 1, 2, \ldots, h$.

Abbiamo $\phi(m \cdot n) = m \cdot n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_h}\right) =$

$= \phi(m) \cdot \phi(n)$. $\blacksquare$

Ripercorriamo il precedente procedimento generale in un caso concreto.

Esercizio. Sia $n = 60$. Calcolare
$$\phi(n) = \#\{m \in \mathbb{Z}^+ ; m \le n, \ MCD(m,n) = 1\}.$$

Soluzione. Si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Poniamo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, da cui $60 = p_1^2 p_2 p_3$.

Siano $A_1 = \{m \in \underline{60} ; 2 | m\}$, $A_2 = \{m \in \underline{60} ; 3 | m\}$, $A_3 = \{m \in \underline{60} ; 5 | m\}$, da cui

$A_1 \cap A_2 = \{m \in \underline{60} ; 2 | m \text{ e } 3 | m\}$, $A_1 \cap A_3 = \{m \in \underline{60} ; 2 | m \text{ e } 5 | m\}$

$A_2 \cap A_3 = \{m \in \underline{60} ; 3 | m \text{ e } 5 | m\}$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{m \in \underline{60} ; 2 | m \text{ e } 3 | m \text{ e } 5 | m\}$.

Ovviamente $\Omega = \{m \in \mathbb{Z}^+ ; m \le n = 60\}$ e la soluzione è data da $\phi(60) = |\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i|$. Dalla formula di Sylvester,
$$\phi(60) = |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Perciò
$$\phi(60) = 60 - \frac{60}{2} - \frac{60}{3} - \frac{60}{5} + \frac{60}{2\cdot 3} + \frac{60}{2\cdot 5} + \frac{60}{3\cdot 5} - \frac{60}{2\cdot 3\cdot 5} =$$
$$= 60\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}\right) =$$
$$= 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) = 16.$$

Esercizio 1 Sia $c \in \mathbb{Z}^+$. In quanti modi $D^c_{n,k}$ posso disporre k biglie indistinguibili in n urne in modo che ogni urna contenga al più c biglie?

Soluzione Procediamo per ricorsione sul numero delle urne. Notiamo che:

i) $D^c_{0,k} = \delta_{0,k}$, ii) $D^c_{1,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq c \\ 0 & \text{se } k > c. \end{cases}$

iii) (Ricorsione)

$$D^c_{n,k} = D^c_{n-1,k} + D^c_{n-1,k-1} + \dots + D^c_{n-1,k-c}.$$

Sia $M^c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M^c(n,k) = D^c_{n,k}$.

La funzione generatrice $M^c_0(t) = 1$, mentre

$M^c_1(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^c$. $(*)$

Consideriamo la funzione generatrice della riga n-esima:

$$M^c_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D^c_{n,k}\, t^k.$$

Poiché

$$D^c_{n,k} \underset{\text{ricorsione}}{=} \sum_{i=0}^{c} D_{n-1,k-i} \underset{\text{da }(*)}{=} \sum_{i=0}^{k} D_{n-1,k-i}\, D_{1,i},$$

segue che

$$M^c_n(t) = M^c_{n-1}(t)\, M^c_1(t),$$

da cui

$$M^c_n(t) = \left(M^c_1(t)\right)^n = \left(1 + t + \dots + t^c\right)^n.$$

$\boxtimes$

Osservazione Si noti che, per $c = 1$, $M^1_1(t) = 1 + t$, quindi $D^1_{n,k} = \binom{n}{k}$, coerentemente col fatto che il problema collassa alla statistica di Fermi-Dirac.

16 tre

I prossimi esercizi sono generalizzazioni del precedente; la variazione è che il vincolo superiore NON è costante, bensì varia.

Affronteremo prima un caso "concreto", poi il caso generale; il caso generale è noto in FISICA TEORICA come "Statistica di GENTILE - (FERMI - EINSTEIN)".

Ricordiamo che il numero di soluzioni intere non-negative della equazione

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

col vincolo inferiore $x_1 \geqslant a_1$, $x_2 \geqslant a_2$, ---, $x_n \geqslant a_n$

è uguale a:

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k - a_1 - a_2 - \cdots a_n \end{matrix} \right\rangle = \binom{n + k - a_1 - a_2 - \cdots a_n - 1}{n - 1}$$

La soluzione è un significativo esempio della forma di Sylvester per il principio di inclusione/esclusione.

16 quater

ESERCIZIO 1 bis In quanti modi si possono disporre 5 biglie INDISTINGUIBILI in 3 urne, col vincolo che la prima urna contenga al più 3 biglie, la seconda urna contenga al più 1 biglie, la terza urna contenga al più 2 biglie.

Sol. Si tratta di contare il numero di soluzioni intere non-negative della equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

soggette alle condizioni $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 1$, $x_3 \leq 2$

Soluzione Sia

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{Z}^+)^3 ; \; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \right\}$$

e siamo

$$A_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) ; \; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \, , \; x_1 \geq 4 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) ; \; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \, , \; x_2 \geq 2 \right\}$$

$$A_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) ; \; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \, , \; x_3 \geq 3 \right\}$$

La soluzione è data da $\left| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i \right| \overset{I/E}{=}$

$$|\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| .$$

Ora $|\Omega| = \left\langle {3 \atop 5} \right\rangle = 21$, $|A_1| = \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 3$, $|A_2| = \left\langle {3 \atop 3} \right\rangle = 10$

$|A_3| = \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 6$, $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = 0$, $|A_2 \cap A_3| = \left\langle {3 \atop 0} \right\rangle = 1$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. Perciò

$$\left| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i \right| = 21 - 3 - 10 - 6 + 0 + 0 + 1 + 0 = 3 .$$

(16.5)

Esercizio 1 ter (caso generale)

Quante sono le soluzioni intere non-negative di

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

soggette ai vincoli superiori $x_1 < a_1$, $x_2 < a_2$, ..., $x_n < a_n$?

Soluzione

Sia $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n ; x_1 + \dots + x_n = k\}$.

Per $i = 1, 2, \dots, n$, sia

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_1 + \dots + x_n = k, \quad x_i \geq a_i\}.$$

La soluzione è data da $\left| \Omega - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$.

Per la formula di Sylvester questa cardinalità è data da

$$\left| \Omega - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_h \leq n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_h} \right|$$

$$= \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_h \leq n} \left\langle {n \atop k - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_h}} \right\rangle .$$

Esercizio Data una tavola circolare con $2n$ posti numerati $1, 2, \ldots, 2n$, dimostrare che il numero di modi scegliere k posti in modo che mai 2 siano ADIACENTI è dato da:

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

Soluzione. Si tratta di applicare due volte la soluzione del problema di Gergonne nel caso di "la coppia" uguale ad 1. Ricordiamo che, dati m ed h, il numero di h-sottoinsiemi del segmento $\underline{m}$ che non contengono due interi consecutivi è dato da

$$\left\langle {h+1 \atop m-h-(h-1)} \right\rangle = \left\langle {h+1 \atop m-2h+1} \right\rangle = \binom{m-h+1}{h}. \quad (*)$$

Nel nostro caso dobbiamo considerare due casi.

1) La k-pla considerata contiene il posto contrassegnato 1. Dobbiamo perciò considerare le $(k-1)$-parti dell'insieme $\{3, 4, \ldots, 2n-1\}$ (che ha $2n-3$ elementi) non contenenti due interi consecutivi. In base a $(*)$, ponendo $m = 2n-3$, $h = k-1$, queste sono in numero di

$$\binom{2n-3-k+1+1}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1}.$$

2) Le k-ple considerate NON contiene il posto contrassegnato 1. Dobbiamo perciò considerare le k-parti del segmento $\{2, 3, \dots, 2n\}$ (che ha $2n-1$ elementi) non contenenti due interi consecutivi. In base a $(*)$, ponendo $m = 2n-1$, $h = k$, queste sono in numero di

$$\binom{2n-1-k+1}{k} = \binom{2n-k}{k}.$$

Perciò il numero cercato è:

$$\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} \qquad (*)$$

Si noti ora che per $m, h \in \mathbb{Z}^+$, risulta

$$\binom{m-h-1}{h-1} + \binom{m-h}{h} = \frac{h\,(m-h-1)! + (m-h)\,(m-h-1)!}{h!\,(m-2h)!} =$$

$$= \frac{m}{m-h} \cdot \frac{(m-h)\,(m-h-1)!}{h!\,(m-2h)!} = \frac{m}{m-h}\binom{m-h}{h}.$$

Ponendo $m = 2n$, $h = k$, la $(*)$ diventa:

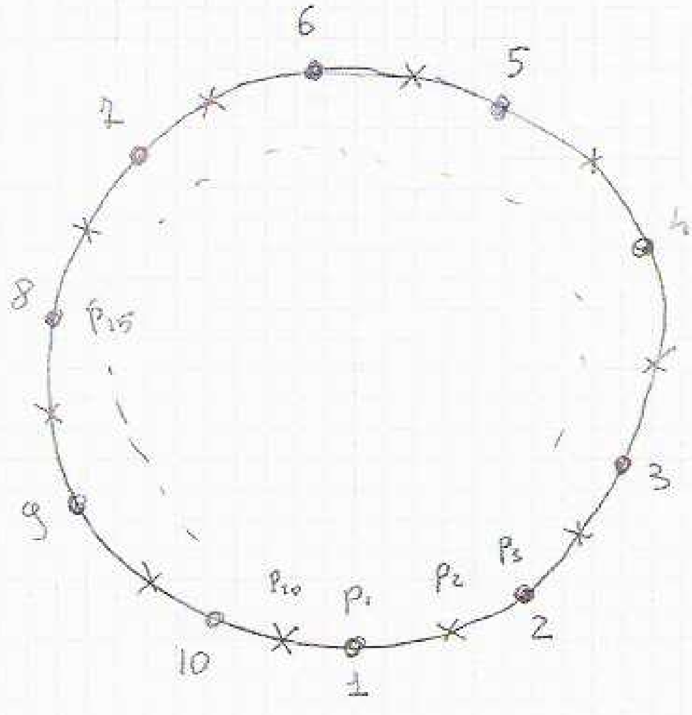
$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

C.V.D. ⊠

Problema 3 (Problema dei MÉNAGES, Lucas 1891)

In quanti modi si possono disporre n signori (numerati $1, 2, \ldots, n$) e le rispettive consorti (numerate $1', 2', \ldots, n'$) attorno ad un tavolo circolare con posti numerati, in modo che nessun signore abbia al proprio fianco la consorte?

Preliminarmente, consideriamo il cosiddetto problema ridotto: gli uomini sono già seduti nei posti dispari in ordine crescente leggendo in senso antiorario:



$n = 10 \qquad 20$ posti $= \{p_1, p_2, \text{------}, p_{20}\}$

In questo schema, una disposizione delle signore può essere riguardata come una BIIEZIONE

$$f : \underline{n} = \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow[su]{1-1} \underline{n}' = \{1', 2', \dots, n'\}$$

ove $f(i)$ = signora seduta a ~~destra~~ sinistra del signore i, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

Per $i \in \underline{n}$, sia

$$A_{2i-1} = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ; \ f(i) = i' \}$$

Per $i \in \underline{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$, sia

$$A_{2i} = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ; \ f(i) = (i+1)' \}$$

Infine, poniamo

$$A_{2n} = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ; \ f(n) = 1' \} .$$

Posto $\Omega = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ; \ f \text{ biiettiva} \}$, la soluzione del problema ridotto è data da

$$U_n = \left| \Omega - \bigcup_{j=1}^{2n} A_i \right| .$$

Ora, per ogni $T \subseteq \underline{2n} = \{1, 2, \dots, 2n\}$

si ha

$$\left| \bigcap_{j \in T} A_j \right| = \begin{cases} (n - |T|)! & \text{se } T \text{ \underline{non contiene} due interi consecutivi della successione } 1, 2, 3, \dots, 2n, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi dobbiamo risolvere il seguente problema: dato k, quante sono le k-parti di $\underline{2n} = \{1, 2, \dots, 2n\}$ che non contengono 2 interi consecutivi, NÈ la coppia $\{1, 2n\}$?

Le k-parti contenenti 1 non possono contenere nè 2 nè $2n$; quindi è come scegliere una $(k-1)$-ple in $\{3, \dots, 2n-1\}$ e ciò si può fare in $\binom{2n-k-1}{k-1}$ modi.

Quelle che non contengono 1 sono ovviamente:

$$\binom{2n-k}{k}$$

(in $\{2, 3, \dots, 2n\}$)

Quindi il numero cercato è

$$\binom{2n-k-1}{k-1}+\binom{2n-k}{k}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

Applicando la formula di Sylvester, per $n \geq 2$, si ha quindi

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot(n-k)!$$

(FORMULA DI TOUCHARD, 1934)

Passando dal problema ridotto a quello generale, basta osservare che i signori possono sedersi o nei posti dispari o nei posti pari, ed, in entrambi i casi, secondo una disposizione (permutazione di $\underline{n}=\{1,2,\dots,n\}$) qualsiasi. Perciò la soluzione del problema generale è:

$$2\cdot n!\cdot U_n\ .$$